高職線性規劃單元之動態電腦教材設計與其補救教學成效

謝哲仁　謝佩君
國立臺南護理專科學校　臺南大學應用數學所
chejenhsieh@mail.ntin.edu.tw　emptycat2002@yahoo.com.tw

摘　要

本研究應用電子試算表設計動態電腦輔助教材，並選取三位在線性規劃單元表現不佳的學生，進行補救教學。前測時，三位個案學生都無法解線性規劃文字應用題。在後測表現中，三位個案學生線性規劃問題的解題能力均有提升。三位個案學生在前測時，線性規劃解題能力發展階段都在內化階段前期(pre-intra level)。在後測表現，其中一位個案學生提升到外化階段(inter-level)，另二位個案學生提升到內外化階段(trans-level)。三位個案學生在延後測的表現與後測一樣好，顯示補救教學的成效具有良好的保留效果。

關鍵字：文字應用題、電腦輔助學習、線性規劃

一、緒論

近年來，升學管道多元化，因此，許多高職生選擇繼續升學。然而，高職教育課程對於基礎學科能力的培養較不足，學生缺乏自我學習的能力(楊豪森，2002)，在抽象邏輯思考、演繹推理上常遭遇困難，因此造成學習成就低落進而在專業科目學習面臨挫折(徐國樹，1996)。許多科技大學紛紛要求兼收一般高中畢業生，主要因為高職生的英、數能力不足以應付大學階段的學習需求。由此可見，高職學生被要求要有更強的國文、英文與數學能力(周霆，2004)。

1980 年美國「全國數學教育協會」(The National Council of Teachers of Mathematics, NCTM）就指出「問題解決」必須是今後學校數學教學的重心。高職數學課程中，線性規劃的文字應用問題單元就是應用數學知識解決生活中的問題，例如：如何分配才能使產能最大？如何投資才能獲利最大？這些都是生活中常見的問題。周霆(2004)在研究中發現，許多學生無法理解代數文字題的題意，即使學生已具備解圖解不等式及求極值的能力，然而在面對代數文字題時，卻無從下手。可見，學生在解文字應用題這個部分產生了困難。根據皮亞傑的認知發展理論，中學生的年齡已達到形式運思的發展時期，應有能力去從事抽象符號的假設及演繹推理的工作，但學生在高中、甚至在大學的學習階段，解文字應用題時仍然產生了許多困難。

Laborde (1990)發現在解數學的文字題時，有的學生可以把題目寫成代數式子，但是並不瞭解其意義；有些學生會列式子，但不會運算；也有些學生一開始就不懂得如何把語言訊息轉換成符號來運算。Lewis 與 Mayer (1987)認為多數學生未能成功解題，常出現在問題的理解與表徵甚於問題的求解，所以問題的解題教學應著重問題表徵訓練，然

而現有大部分的教學卻著重問題的解決，特別是在計算的執行。現今中學的教材在介紹數學概念，常假設學生已會使用符號思考和運算證明，殊不知當學生的操作經驗不足時，便以記誦的方式來學習，其學習成效將極為有限。例如在學習不等式及線性規劃單元時，學生常以背誦的方式，來理解二元一次不等式的意義。線性規劃單元中，學生機械式的代入頂點求極值，卻不了解其背後的原理。學生的學習只侷限於代數符號的思考，運算及解題程序，雖然教材中偶有輔以圖示說明，但學生往往沒有真正去理解圖形與代數符號所代表的意義。學習只為了快速計算出答案，但面對新的文字應用問題，無法將題意轉譯為代數關係式子，因為所學到的數學知識只侷限於程序知識的機械操作上，因此也就無法將所學到的數學知識，應用在新的問題情境或是實際生活中，久之，數學學習失去意義，對數學也就有很偏頗的看法。因此，學生雖然能夠快速地解出代數問題，當面對文字應用題時，卻也束手無策。即使優秀的學生，在文字應用題的學習上也出了問題。因此，學生是否能將應用問題的語意情境以數學符號來表徵，進而以代數符號運思、進行解題，將是學生能否解應用問題的關鍵。

應用問題不僅是學生頭痛的問題，如何教也是教師所關心的。Sanford (1927)從文字問題演進的過程，發現文字問題的困難一直伴隨著老師和學生。因此，如何改善現有文字應用題教學的設計，以利於日後建構學生解決文字應用問題的能力，的確需要重視及深入探討的。

美國數學教師協會曾於1983年提出相關建議：所有各層次的教師為了教導數學技能與概念，讓學生達到有效的學習，都應該使用科技的工具。而如何善用科技工具到數學教學中，更是在科技融入數學教學的另一個重點。

Abramovich (2003)認為電子試算表對於協助代數概念的學習有很大的潛能，而且對於每個階段的學生都可以有幫助。Friedlander (1998)建議將電子試算表作為算術和代數之間建立了一個理想的橋樑，並允許學生能自由的遊走於算術和代數之間。電腦輔助教材的設計對於教師而言的確是一大挑戰，而電子試算表易於操作且功能強大的特性，是一個適合融入數學教學的軟體。在國外的教學與研究中，電子試算表已被廣泛地應用。在國內也有許多專家學者開始應用電子試算表，進行教材設計、教學與研究。學生在學習文字應用題時所產生的問題已被重視，有許多學者將認知理論、學習理論，應用在電腦教材的設計上，針對文字應用題，進行相關研究，也得到了不錯的成果，例如：謝哲仁、涂世曜 (2003)更將日常生活的情境與數學多重表徵連結起來，學習者因此能將日常生活中發生的數值改變現象以代數關係式來表徵。Pea (1987)認為應用科技工具，可以對於心理層次的活動有所幫助。科技工具的使用，使得複雜的過程被簡化，我們透過工具的支持，直接操作物件；因此，電腦在數學教育上的角色已不僅僅是進行數值運算及反覆練習的工具，更可以透由電腦的輔助進行概念的學習及認知的轉變。

技職體系的學生常由較具體、直觀的方法進行學習（謝哲仁，2002）。正好電腦以動態圖像的方式呈現許多科學現象變化的過程，提供學習者更強而有力的學習與知覺經驗。所以教師可以善用科技，為學生建構一個具有主動認知的環境，搭起學習的鷹架(謝哲仁，2002)。

因此，本研究應用電子試算表，並參考相關學習理論，設計出可以提供學生由行動去建構數學概念的動態電腦輔助教材。運用所設計的動態電腦輔助教材進行線性規劃文字應用題的補救教學，探究學生在學習過程中，表徵間的轉譯能力改變為何，以及進行補救教學前、後，個案學生的學習成效，使用動態電腦輔助教材後的想法為何。

二、研究設計

(一)研究方法

本研究採個案研究。先進行電腦動態輔助教材設計，並且進行電腦環境預試，讓學生能夠在可以理解及容易操作的環境下進行學習。本研究採立意取樣（purposeful sampling），選取三位在線性規劃單元表現不佳的學生進行補救教學。三位個案學生的數學學習興趣不高，三位個案學生的數學的成績，在全班的後百分之二十五左右。在學習完線性規劃單元補救教學課程後，進行後測以及填寫動態電腦輔助教材使用問卷。於後測結束一個月後，再進行延後測。所收集的文件資料包括成就測驗前測、後測與延後測，以及學生每次補救教學課程結束後所填寫之學習單。進行補救教學之歷程中，需要進一步探討的部分，則加以深入提問，以瞭解研究對象的學習狀況。為求蒐集資料的完整性，研究者將訪談與補救教學過程全程以錄音筆錄音及數位錄影機錄影下來，對於個案學生的學習過程及情況記錄於研究日誌中。並將所收集之資料轉譯成並分析。資料分析時，研究者以 R 代表，個案學生分別以 S_1、S_2、S_3 表示。補救教學課程為五個線性規劃範例。本研究採用不同的資料收集的方法，多個研究者的參與及討論，透過不同角度資料的結合，就方法、人員、資料的三角校正，呈現研究報告的可信度。限於篇幅，本文只以結論的方式詮釋。

(二)檢驗學生學習成效及能力之依據：

1.本研究檢測學生是否已具備該概念，參考 Concepts in Secondary Mathematics and Science（以下縮寫為 CSMS。Murrary，1981，p7）小組的處理方法，在 CSMS 的分析方法中（郭汾派、林光賢及林福來，1981），指出如果答對該單元目標的題目三分之二以上，即具備該單元目標的能力。

2.學生在面對新情境時是先以其舊經驗為基礎，希望能合理的解決新問題。“個體將其過去的行動、處理過程、物件協調及綜合成對新問題情境起始的反應機制”Baker, Cooley & Trigueros (2000,p.558)定義為基模。利用行動過程物件理論(Action Process Object Schema, APOS)，我們可以分析學生處理圖形物件時所發展的基模。Bakeret al. 就從學生圖形的解析及所涉及的區間兩個向度，以內化階段（intra level）、外化階段（inter level）及內外化階段（trans level）三個發展階段來闡釋學生的圖形發展基模。

(1)內化階段（intra level）：個別事件或物件被分析其特別或部份的性質，此時學習者對事件或物件的解釋及邏輯推理常是充分而非必要的。行動在此階段常是獨立的，並不置於序列行動之間，且行動之間的關聯並不被建立。

(2)外化階段（inter level）：當學習者利用比較或反射行動後，使得行動之間的關聯被建立；起始行動與應用的結果，其必要性的邏輯推理在此階段可以被建立，因此

個別行動被融入到序列的行動系統當中。

(3)內外化階段（trans level）：當學習者遇到一個新情境時，能察覺其為舊基模的特殊情形或辨識其與原基模的差異，並運用舊有基模可以解決新情境或被拒絕代入舊基模時，事實上，學習者已進入此一階段。

本研究應用其內化階段(intra level)、外化階段(inter level)及內外化階段(trans level)三個發展階段來闡釋個案學生線性規劃單元的發展。在線性規劃的解題過程以表徵轉譯來分析，包含了文字轉譯成代數及代數轉譯成圖形。因此，本研究以轉譯能力來分析個案學生在線性規劃問題中，三個發展階段的發展基模。

(1) 內化階段(intra level)：具備由文字轉譯到代數符號的能力。在解線性規劃的題目時，具備寫出變數、目標函數及二元一次聯立不等式的能力，即代表解題能力達到內化階段。當學生不具備內化階段能力時，則學生的線性規劃解題能力為內化階段前期(pre-intra level)。

(2) 外化階段（inter level）：具備了由代數轉譯到圖形的能力。解線性規劃的題目時，具備了內化階段能力，並能正確圖解二元一次聯立不等式，即代表解題能力達到外化階段。

(3) 內外化階段（trans level）：能將轉譯能力作為基模，應用於解線性規劃文字題，並且可以正確解題，即代表解題能力達到內外化階段。

(三)動態電腦輔助教材設計

本研究中所設計的動態電腦輔助教材，著重表徵間意義的建立與連結，透由電腦系統的支持，省去繁複的計算及畫圖的步驟，讓個案學生經由行動(action)去探索、歸納、發現與驗證數學概念。本研究所設計的動態電腦輔助教材特色如下：

(1)可行動(action)：允許學生操作(action)範例中的變數、物件，立即由螢幕獲得回饋，觀察單一表徵內動態變化的情形或表徵間引發之相關變化。

(2)超連結及個別化：每個單元課程中設計數個分頁相互連結(link)，個案學生可以透過分頁視窗的切換，依個人學習狀況選擇學習新的主題或複習。

(3)多重表徵：每一分頁中同時呈現(1)文字模式(text mode)─問題情境、操作步驟、定義說明、代數式子意義及結論歸納；(2)數值模式(numerical mode)─學生可以自由操作、探索情境中變數，輸入或猜測問題的答案；(3)圖形模式(graphical mode)─輸入數值，觀察數值在圖形中對應之關係，探測之正確與否。

(4)教具及學具：以教具學具的觀點，將數學課程融入電腦輔助學習環境中，以電腦為工具，設計出能夠協助教師教學及幫助學生學習的學具。

(5)動態電腦輔助教材之便利：計算數值、立即回饋、呈現圖形，容易操作。

三、研究結果分析與討論

(一)個案學生成就測驗結果分析

根據 CSMS 的分析方法（郭汾派、林光賢及林福來，1981），如果答對該單元題目總數的三分之二以上，即具備該單元目標的能力。在表 1 中，「X」代表未通過該單元測

驗題目總數的三分之二以上；「O」代表通過該單元測驗題目總數的三分之二以上，具備其數學單元之目標能力。

表 1　前測、後測及延後測成就測驗結果

數學單元		題數	S_1			S_2			S_3		
			前測	後測	延後測	前測	後測	延後測	前測	後測	延後測
線性規劃	文字↓代數	8	*0/8*	8/8	7/8	*0/8*	8/8	8/8	*0/8*	6/8	8/8
			X	O	O	X	O	O	X	O	O
	代數↓圖形	4	*0/4*	3/4	4/4	*0/4*	4/4	4/4	*0/4*	3/4	3/4
			X	O	O	X	O	O	X	O	O
	求解	4	*0/4*	*2/4*	*2/4*	*0/4*	4/4	4/4	*0/4*	3/4	3/4
			X	X	X	X	O	O	X	O	O

(二)個案學生前測、後測及延後測答題表現分析

根據研究過程中的觀察，訪談及個案學生在前測、後測及延後測的答題表現情形，敘述三位個案學生的答題表現。

1.S_1答題表現

(1)前測答題表現：S_1在前測時，在線性規劃的答題狀況是全部空白。

(2)後測答題表現：S_1在後測時解線性規劃時，由文字轉譯成代數及代數轉譯成圖形的能力已經具備，但在最後求解部分，沒有答對三分之二的題數。雖然 S_1已具備了求線性規劃問題極值的能力，作答時，由於粗心，將二元一次聯立不等式區域的頂點標錯，導致一題線性規劃問題答案錯誤。整體而言，S_1具備了解線性規劃問題的初步能力。

(3)延後測答題表現：S_1在延後測時，表現和後測一樣，可見 S_1線性規劃解題能力具有良好的保留概念。而在線性規劃問題求解部分，S_1也因為粗心沒有考導致答案錯誤。

2.S_2答題表現

(1)前測答題表現：線性規劃問題全部空白，不會做答。

(2)後測答題表現：S_2在後測時，線性規劃問題全部答對。已經能夠正確寫出線性規劃問題答案，可以清楚的說明文字、代數及圖形之間的關係與意義，也很清楚整個線性規劃的解題過程，顯示 S_2已具備了線性規劃的解題能力。

(3)延後測答題表現：S_2在延後測時，線性規劃問題也是全部答對，可見 S_2解線性規劃問題的能力具有良好的保留概念。

3.S_3答題表現

(1)前測答題表現：S_3在前測時，雖然有列出目標函數及不等式，但都是由題意及數字拼湊而成，無法說明代數式子的意義，常列錯代數式子。S_3會機械式的圖解不等式、找交點，卻不知畫出圖形及找交點的目地是什麼。解題時仍存在許多錯誤的概念，文字、

代數與圖形之間無法做有意義的連結。

(2)後測答題表現：S_3 在後測時，能夠將文字正確的轉譯成代數式子，且文字、代數與圖形之間的意義連結正確，具備了解線性規劃問題的能力。

(3)延後測答題表現：S_3 在延後測的表現和後測一樣好，可見 S_3 在解線性規劃問題具有良好的保留。

(三)個案學生線性規劃問題概念層次分析

三位個案學生在前測時，概念層次都是在內化階段前期（pre-intra level）。經過補教教學後，在後測的表現中，S_1 的概念層次提升到外化階段（inter level），S_2 與 S_3 的概念層次提升到內外化階段(trans level)，顯示應用動態電腦輔助教材進行學習，能建立個案學生表徵間的轉譯能力，個案學生能夠應用其轉譯能力來解出線性規劃問題。在延後測的表現中，三位個案學生的表現與後測一樣好，顯示個案學生所建立的解題能力具有良好的保留功效。

(四)動態電腦輔助教材使用問卷結果分析

1.操作簡單易懂，且可以引起學習的興趣、增進學習效果，喜歡在電腦環境下學習數學。即使沒有老師的協助，也有信心能學會。

2.動態電腦輔助教材呈現文字、代數、圖形等相關資訊，可自行輸入、操作方便，易於理解。

3.電腦設計的回饋功能，讓學生覺得很有信心，一直想繼續，完成後很有成就感。

四、建議

（一）Excel 的軟體取得容易，設計原理簡單，不需要花很長的時間，即可設計出具有文字、數值及圖形三種表徵的動態電腦輔助教材。適合教師應用於數學教材設計。

（二）學生在動態電腦輔助教材下學習，能提升學生的學習意願及興趣。而且個別化及回饋系統讓學生能主動學習。教師可以嘗試藉由電腦教材的輔助，讓數學課程由靜態且被動的型態，推展到立體動態且主動的型態。

（三）動態電腦教材的超連結功能，讓學生能依自己的進度學習。電腦設計中的回饋系統，學生可以立即知道答案的對錯，碰到困難時可進行猜測，不會馬上放棄學習；當學生注意力不集中時，也可以將學生的注意力拉回，不致於整堂課都發呆。因此，動態電腦教材很適合進行補教教學。

五、主要參考文獻

（一）、中文部分

周霆(2004)。**商職二元一次不等式與線性規劃問題錯誤類型之分析研究**。國立高雄師範大學數學系教學碩士班碩士論文，未出版，高雄。

徐國樹(1996)。淺談高職數學的教與學。**技術及職業教育**，35 期，頁 33-34 頁。

涂世曜、謝哲仁(2003)。**模擬生活實際情境引入線型函數學習之電腦設計**。高雄師範大學：2003 *International Conference of Curriculum & Instruction in Technology*

Education(Nov.6-7)

楊豪森(2002)。高職教育面臨的衝擊。**技術及職業教育**，69 期，頁 48-49 頁。

謝哲仁(2002 b) 動態電腦幾何教學建構之設計實例與理論探析 國立嘉義大學數學教育研究所:**革新國民中小學數學教育議題** (頁 225-244) 高雄:復文出版社。

（二）、英文部分

Abramovich, S.(2003).Spreadsheet-Enhanced Problem Solving in Context as Modeling, *eJournal of Spreadsheet in Education* 1(1):1-17.

Bernadete Baker, A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education* .2000,Vol.31,No.5,557-578.

Friedlander, A.(1998). An EXCEL lent bridge to algebra. *Mathematics Teacher* 91(50):382-383.

Laborde, C. (1990). Language and Mathematics. In P. Nesher, & J. Kilpatrick(Ed.), Mathematics and Cognition：*A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. NY：Cambridge University Press.

Lewis, A.B. ,& Mayer, R.E. (1987) Students' miscomprehension of relation statements in arithmetic word problems. *Journal of educational psychology*, 79,361-367

Pea, R. D.(1987) Cognitive technologies for mathematics education. In: A.H.Schoenfeld(ed.) Cognitive Science and Mathematics Education, 89-122. Hillsdalc, NJ:Lawrence Erlbaum.

Sanford, V. (1927).*The History and Significance of Certain Standard Problem in Algebra*. New York：Bereau of Publication， Teachers College, Columbia University.