國中二年級學生多重解法解題表現與回顧策略使用次數關係之研究

李心儀〈Shin-Yi Lee〉
Teachers College, Columbia University
SL2528@caa.columbia.edu

摘　要

本研究之主要目的為探討國中二年級學生多重解法的解題表現與回顧〈look back〉策略使用次數的關係。以 Polya〈1973〉的理論為基礎，回顧〈look back〉在本研究中定義為「檢視之前做過或之前知道的事物」，研究者設計「多重解法學習單」以藉由應用不同解法解決問題的方式來鼓勵學生使用回顧〈look back〉策略，本研究結果顯示回顧〈look back〉次數愈多的學生傾向於在「多重解法學習單」上的解題表現會愈好。

關鍵詞：回顧、多重解法、問題解決

一、研究動機與目的

當做完一題題目時，很多學生認為他們的任務已經結束〈Cai & Brook, 2006; Jacobbe, 2007; Polya, 1973; Taback, 1988〉。他們常常遵循著一開始看似合理的作法，只要能繼續做下去，他們往往並不會進一步地評價他們的解題決定〈Charles, Lester, and O'Daffer, 1987〉。如此做，他們錯過了這個題目一個重要且有益的層面(Polya, 1973)。Polya〈1973〉認為學生可以藉著回顧〈look back〉已完成的作法和藉著重新考慮及檢視解題路徑和結果，來鞏固他們的知識和發展他們的問題解決能力。的確，我們應該鼓勵學生養成回顧 〈look back〉解題作法和過程的習慣。如同 Venezky 和 Bregar〈1988〉所強調，或許學生最需要用以改善解決問題能力的方法不是新穎和更熟練的教法，而只是更多在評價(evaluating)解法上的練習。

文獻上已有很多關於問題解決教學的活動，然而，在回顧教學這一方面卻相當缺乏（Jacobbe, 2007； Kersh & McDonald, 1991； Sowder, 1986; Taback, 1988； Zubris, 1994)。因為回顧〈look back〉涉及高階的認知，因此很難直接教授與學生，或許藉由一些會鼓勵學生回顧〈look back〉的教學技巧來間接鼓勵學生回顧，會增進學生回顧〈look back〉策略的使用。文獻指出利用多重解法〈alternative solutions〉解題會鼓勵學生回顧〈Cai & Brook, 2006； Kersh & McDonald, 1991； Krulik & Rudnick, 1994)。然而卻鮮少實驗研究探討多重解法如何影響學生的解題表現〈Groβe & Renkl, 2006; Silver, Ghousseini, Gosen, Charalambous, & Strawhun, 2005〉。因此，本研究之研究目的為探討國中二年級學生多重解法的解題表現與回顧〈look back〉策略使用次數的關係。

二、文獻探討

〈一〉回顧〈look back〉的定義

George Polya，一位著名的數學家，提出四階段的問題解決〈problem solving〉模組：了解問題〈understanding the problem〉、訂定計畫〈devising a plan〉、實踐計畫〈carrying out the plan〉、和回顧〈looking back〉。此模組已證明可幫助學生增進解決問題的表現〈Kantowski, 1977; Schoenfeld, 1979〉。在此模組中，Polya〈1973〉指出五個可以激勵學生回顧（look back)已完成的作法的教學問題：你可以檢驗這個結果嗎？你可以檢驗你的論點嗎？你可以用不同的方法推導出這個結果嗎？你可以用較快速的解法解題嗎？你可以用此結果或方法來解決其它問題嗎？然而，回顧〈look back〉並不只限於在完成作法「之後」。Polya〈1973〉指出解題者在解題過程「之中」應時常檢視題目的未知、資料和條件，以確認自己是否在正確的解題路徑上。Polya〈1973〉亦強調在解題歷程中回顧〈look back〉剛結束的解題步驟及評論正在使用的解題策略和過程之重要性。因此，在本研究中回顧〈look back〉的定義融合了解題「中」與解題「後」的回顧，並定義為「檢視之前做過或之前知道的事物」，也就是學生可能回顧〈look back〉已完成的作法、剛結束的一個解題步驟、題目資訊、或過去的學習經驗。如同 Silver〈1982, cited in Kilpatrick 1984〉宣稱，許多 Polya 的啟發式教學〈heuristic〉建議是用於促使解題者反思解題過程和其有效性。

〈二〉分析回顧〈look back〉策略的相關研究

Silver 和 Kilpatrick〈1989〉指出制定評量問題解決過程如控制〈monitoring〉或評價〈evaluation〉的技巧之需求性。Schoen 和 Oehmke〈1980〉發展出一個編碼量化系統〈coding and quantification system〉來評量學生的回顧〈look back〉能力，然而此系統只用於評量學生解題後的回顧，並沒考慮到解題歷程中的回顧。此外，Kilpatrick (1967) 亦發展出一個編碼系統〈coding scheme〉來表示學生的解題歷程，及一個檢核表〈check list〉來記錄學生解題表現的特徵，然而，無論是編碼系統或檢核表都只記錄解題者是否回顧〈look back〉，而並無持續追蹤整個解題歷程中回顧〈look back〉策略的使用，因此本研究將試著發展另一套評量學生回顧〈look back〉策略使用的編碼系統〈coding scheme〉，使其不僅能兼顧解題中及解題後的回顧，亦能持續地在整個解題過程中追蹤回顧〈look back〉策略的使用。

〈三〉分析口語活動〈verbal activities〉的相關研究

Bellack, Kliebard, Hyman, and Smith〈1966〉透過分析學生和老師上課的口語活動來研究高中社會科的課室講演，他們錄音下十五個班級、每個班級四節課的課室講演並寫成逐字稿，為分析此資料，Bellack et al.〈1966〉定義一個教學動作〈pedagogical move〉為基本的分析單位，再依據此單位做各項的分析動作如教學內容和歷時。類似地，Fey〈1970〉分析五個高中班級的數學課課室講演，並同樣地使用一個教學動作為基本的分析單位。此外，Offenholley〈2007〉以 Bellack et al. 和 Fey 的研究為基礎，分析十三堂線上數學課程的上課講演，不採用教學動作為研究的基本單位，她改採線上佈告〈online post〉為研究的基本單位。因本研究之編碼系統亦分析受試者之口語活動，因此沿用前述研究設立基本單位之方式來分析受試者的逐字稿。

三、研究方法

〈一〉研究法和研究樣本

本研究採質化之方式進行資料的收集、處理與分析。受試者為六位國二學生，他們以放聲思考〈think aloud〉的方式用多重解法來解題，研究者利用自身發展出的編碼系統來評量受試者回顧〈look back〉的次數並探討其和解題表現的關係。

〈二〉研究工具

1. 多重解法學習單

研究者設計「多重解法學習單」〈如表 1〉來鼓勵學生應用不同的解法來解決同一問題。「多重解法學習單」分為兩部分，第一部分為讓學生寫下一開始想到的解法，第二部分為讓學生寫下之後想到的不同解法，每張學習單皆只有一個數學問題。六位受試者以放聲思考的方式個別完成三張「多重解法學習單」，其中包含例行性與非例行性問題。

表 1

多重解法學習單
問題：
一開始想到的作法：
其它的作法：

2. 「多重解法學習單評量表」

研究者改編 Charles et al.〈1987〉和 Schoenfeld〈1985〉的問題解決表現評量方式，發展出「多重解法學習單評量表」〈如表 2〉，學習單上每一個解法均依此評量表給予評量，不僅考慮所有不同解法的數目，同時亦評量每一解法的優劣，如同 Lester〈1983〉所強調，解題表現評量應同時考量質性及量化的評量標準。

表 2

多重解法學習單評量表	
4 分	解題方向正確，且正確地解答問題。
3 分	解題方向正確，但過程有少許錯誤，如計算錯誤。
2 分	解題方向正確，但過程有一些錯誤，如解題步驟觀念錯誤。
1 分	對題目有限度地了解，例如學生意識到正確的解題方向卻沒有嘗試。
0 分	解題方向錯誤，或對題目有錯誤的了解。

3. 編碼系統

a. 回顧的關鍵詞語：

如同在貳、文獻探討中指出，本研究將回顧定義為「檢視之前做過或之前知道的事物」，但因回顧要求高階的認知，因此很難將受試者放聲思考逐字稿中的言語細微變化一一列入回顧的考慮範圍，為避免模陵兩可及為確保可信度，本編碼系統採取確認本身可能暗示「檢視之前做過或之前知道的事物」的關鍵字，以測量受試者的回顧(look back) 次數。

b. 分析的基本單位：

由受試者的放聲思考逐字稿資料，我們發現暗示回顧的關鍵詞語通常是一個句子的一部分，因此，本編碼系統選擇一個完整的句子為分析的基本單位，任何不完整的句子則納入其語意依靠的句子。

c. 編碼系統：

總共十八篇的放聲思考逐字稿將利用本編碼系統〈如表 3〉評量受試者的回顧〈look back〉次數，限於篇幅有限，本編碼系統簡單敘述如下，欲了解更多，請參閱 Lee (2009)。

表 3

回顧〈look back〉關鍵詞語

關鍵詞語	例子
忘記	"老師，你上次上課講的那個方法我**忘記**了耶…"
記得	"我**記得**有一個公式 "
重複	"老師，可以**重複**你上課講的嗎？"
算錯	"我**算錯**了！這裡是-70 才對！"
想起來	"等一下，我**想起來**那個方法了。"
抄	"喔，寫太快了，所以直接把工作一的數字**抄**上去"
換成	"我得到四分之一…嗯…我想我把它**換成**二等分好了"
繼續	"如果我**繼續**這樣算下去，會很累耶。"
我說過	"因為工作一，**我說過**嘛，一星期可賺 2200，我再加上 2200，我算出來是 8400。"
我剛剛做的是	"**我剛剛做的是**從下面排上去，那現在我是從這邊排下來。"
它說	"**它說**每邊為 10 根桿子的正方形，就是這邊會有 10 根，那邊也會有 10 根。"
它問	"**它問** a，所以 a=-3。"
我哪裡亂掉了	"嗯，怎麼會這樣？**我哪裡亂掉了？**還是推理有問題？"
因為	"**因為**第一個星期制服的錢已經扣掉了"
檢查	"阿！它不是… 我**檢查**一下…我這裡算錯了，它是 100x20=2000"
相同	"這個算法看起來和前面那個**相同**…"
很像	"喔，這和我剛剛用的方法**很像**。"
相差	"但我剛才算是-6，只**相差**一個正負號。"
已經	"**已經**減掉的四根桿子是直的"
剛才	"會多算十根嗎？但**剛才**的作法只有九根多算到…"

四、研究結果

由六位受試者分別完成的三張「多重解法學習單」及其對應的逐字稿中，我們發現他們在此三張「多重解法學習單」的解題表現與回顧〈look back〉次數間的關係分別為：回顧〈look back〉次數最高〈36 次〉、第四高〈4 次〉、第五高〈2 次〉和最低者〈1 次〉，其解題表現分數亦為最高〈13 分〉、第四高〈3 分，有兩位〉和最低〈2 分〉；回顧〈look back〉次數愈高者〈24>10>6≧6>3>0〉，其解題表現分數亦為愈高〈18>12>10>9>4>2〉；以及回顧〈look back〉次數愈高或相等者〈6>5≧5>2>1≧1〉，其解題表現分數亦為愈高或相等〈9>5≧5>2>0≧0〉。本研究結果顯示回顧〈look back〉次數愈多的學生傾向於在多重解法學習單上的解題表現會愈好。

回顧〈look back〉應不僅可以增進學生對內容知識的了解〈Polya, 1973〉，更可以改善他們後設認知的策略〈Kersh and McDonald, 1991; Krulik & Rudnick, 1994〉。當學生從事於要求他們回顧〈look back〉的活動時，他們應可發展他們的認知和後設認知技能〈Kersh & McDonald, 1991〉，而這兩者又是增進他們解題表現的顯著因素〈Mayer, 1998; Schoenfeld, 1985〉。因此熟悉回顧〈look back〉策略應可幫助學生改善他們的解題表現。

五、結論與建議

本研究以「多重解法學習單」的方式鼓勵學生使用回顧〈look back〉的解題策略並發展出一編碼系統以評量學生的回顧〈look back〉次數，本研究結果顯示回顧〈look back〉次數愈多的學生傾向於在多重解法學習單上的解題表現會愈好。

本研究發展的「多重解法學習單」應可以作為教師將回顧〈look back〉策略融入教學的踏腳石，而用以評量回顧〈look back〉的編碼系統應能幫助教師了解學生的解題歷程與數學思考，更多的研究需要用以改善「多重解法學習單」及編碼系統的設計，或用以發展其它鼓勵及評量回顧〈look back〉的方式，以增進我們對回顧〈look back〉與解題表現關係的了解。

六、參考文獻

Bellack, A. A., Kliebard, H. M., Hyman, R. T., Smith, F. L. (1966). *The language of the classroom.* New York: Teachers College Press.

Cai, J., & Brook, M. (2006). Looking back in problem solving. *Mathematics Teaching, 196*, 42-45.

Charles, R. I., Lester, F., & O'Daffer P. (1987). *How to evaluate progress in problem solving*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

DeGuire, L. J. (1980). Polya visits the classroom. In S. Krulik & R. E. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics: 1980 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 70-79). Reston, VA: NCTM.

Fey, J. (1968). *Patterns of verbal communication in mathematics classes.* Doctoral dissertation. Teachers College.

Jacobbe, T. (2007). Using Polya to overcome translation difficulties. *Mathematics Teacher, 101(5),* 390-393.

Kersh, M., & McDonald, J. (1991). How do I solve thee? Let me count the ways. *Arithmetic Teacher, 39(2),* 38-41.

Kilpatrick, J. (1967). *Analyzing the solution of word problems in mathematics: An exploratory study.* Doctoral dissertation, Stanford University.

Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1994). Reflect …for problem solving and reasoning. *The Arithmetic Teacher, 41(6),* 334-338.

Lee, S. Y. (2009). The effect of instruction in alternative solutions on Taiwanese eighth-grade students' problem solving performance. Doctoral dissertation, Teachers College, NY.

Lester, F. K. (1983). Trends and issues in mathematical problem-solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 229-261). New York: Academic Press.

Mayer, R. E. (1998). Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving. *Instructional Science, 26,* 49-63.

Offenholley, K. (2007). *A discourse analysis of an online mathematics classroom.* Doctoral dissertation, Tearchers College, NY.

Polya, G. (1973). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Schoen, H. L., & Oehmke, T. (1980). A new approach to the measurement of problem solving skills. In S. Krulik & R. E. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics: 1980 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 216-227). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. H. (1979). Can heuristics be taught? In J. Lochhead (Ed.), *Cognitive process instruction* (pp. 315-338). Philadelphia: Franklin Institute Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Orlando, FL: Academic Press.

Silver, E. A. (1982). Knowledge organization and mathematical problem solving. In F. K. Lester & J. Garofalo (Eds.), *Mathematical problem solving: Issues in research.* Philadelphia: The Franklin Institute Press.

Silver, E. A. & Kilpatrick, J. (1989). Testing mathematical problem solving. In Charles, R. I. & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 178-186).

Sowder, L. (1986). The looking-back step in problem solving. *The Arithmetic Teacher, 79,* 511-513.

Taback, S. (1988). The wonder and creativity in “looking-back” at problem solutions. *The Arithmetic Teacher*, 429-435.

Venezky, R. L., & Bregar, W. S. (1988). Different levels of ability in solving mathematical word problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *7*, 111-134.

Zubris, J. (1994). *The effects of summarization tools and look-back ability on look-back performance.* Doctoral dissertation, Pennsylvania State University.